

SEGRESTIN P.

Société d'Etudes de la Terre Armée, France

Calcul d'un massif en terre armée par les coins de rupture**Design of reinforced earth structures assuming failure wedges**

In this paper, a comparison is given of the minimum factor of safety based on consideration of local and Coulomb wedge stability. In applying the principle of the Coulomb wedge analysis to the design of reinforced earth, it is necessary to assume that all of the reinforcements extending beyond the failure plane yield simultaneously either in tension or adherence. Results indicate that the latter method produces an apparently higher factor of safety, and should only be used with caution.

Le "coin de Coulomb" reste probablement la manière la plus commode d'aborder les problèmes de soutènement, et de ce fait l'angle $\pi/4 + \phi/2$ est un peu à la Mécanique des Sols ce que $p^2/8$ est à la Résistance des Matériaux.

La terre armée n'échappe pas à la règle, et l'on s'est souvent référé au coin de Coulomb, pour en justifier -ou en recouper- la méthode de dimensionnement interne. Dans leur article de 1969, H. VIDAL et F. SCHLOSSER proposent une première méthode de calcul des tractions dans les différents lits d'armatures, à partir de l'équilibre des prismes qui partent du pied du mur, et d'une hypothèse sur la répartition des tractions (fig. 1).

Par la suite, dans les calculs de culées de ponts, on a pris l'habitude à la Société d'Etudes de la Terre Armée, après la justification un à un des lits successifs d'armatures, de vérifier que les coins coiffés par le sommier d'appui en béton étaient "cousus" au reste du massif par un nombre d'armatures globalement suffisant (fig. 2).

Dans certains pays les directives de calcul pour la terre armée considèrent a priori le plan partant du pied du massif et incliné à $\pi/4 + \phi/2$ comme une enveloppe large, ou extrême, de la frontière entre la zone active et la zone résistante, et recommandent entre autres de vérifier l'adhérence de chacune des armatures à l'arrière de ce plan (fig. 3).

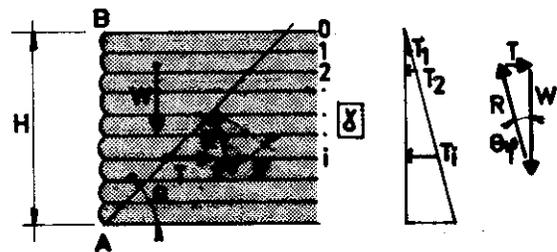


Fig. 1

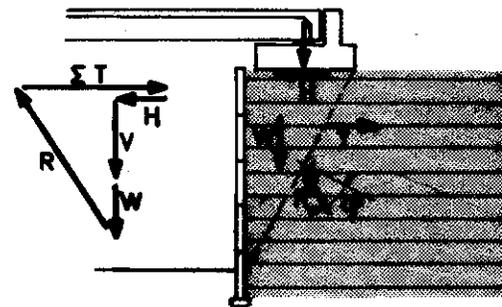


Fig. 2

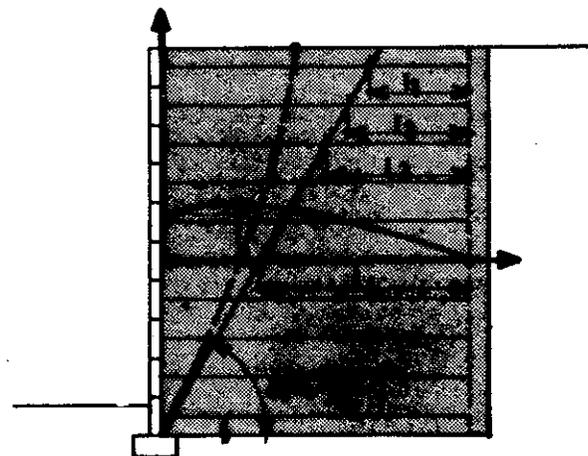


Fig. 3

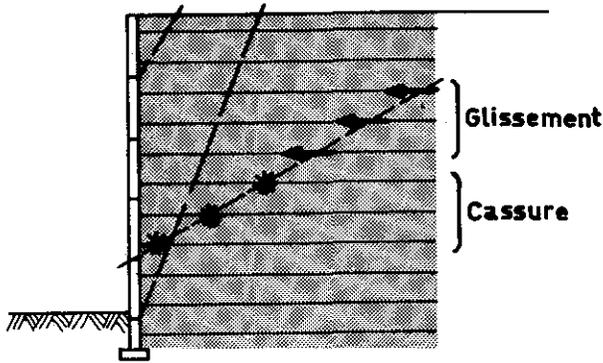


Fig. 4 Différentes ruptures possibles

Rupture potentielle

On voit sur ces quelques exemples que le prisme de Coulomb a été invoqué un peu par tout le monde, à propos des tractions comme à propos de l'adhérence, en pensant "contrainte en service" aussi bien que "mécanisme de rupture".

Cherchant pour notre compte à ordonner ces notions, il nous a d'abord paru logique de n'envisager, à l'aide du prisme de Coulomb, qu'un schéma de rupture. Ce prisme se définit en effet, par hypothèse, comme étant limité par un plan de rupture potentiel. Cette rupture, pour être réellement "potentielle", ne peut pas concerner la terre seule, mais aussi nécessairement les armatures.

Elle ne peut pas non plus ne concerner qu'une partie des armatures : si les autres résistent, la rupture du prisme considéré n'est pas atteinte.

Pour la même raison il est nécessaire de ne privilégier aucun type de rupture a priori : les armatures peuvent céder soit du fait de l'insuffisance de leur section au point où elles traversent le plan de rupture, soit du fait du manque d'adhérence sur leur partie libre au-delà de ce plan. Nous admettons donc que les deux types de rupture peuvent être simultanées le long du plan considéré (fig. 3).

Il n'y a pas de raison enfin de privilégier non plus un prisme plutôt qu'un autre, en fonction du niveau de sa pointe, ou en fonction de son inclinaison. Aussi nous examinerons tous les plans possibles, qu'ils soient traversés par une, plusieurs, ou toutes les armatures (fig. 4).

Inclinaison du plan de rupture potentiel

Arrêtons nous d'ailleurs dès maintenant

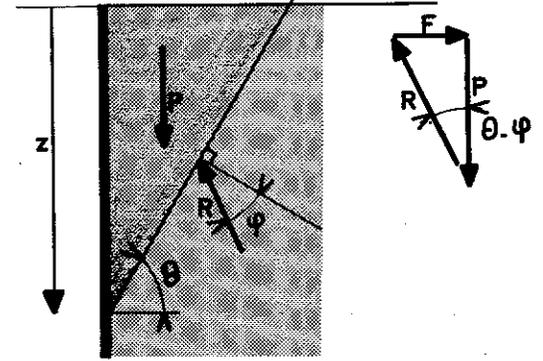


Fig. 5 Stabilité d'un coin derrière l'écran

sur la question de l'inclinaison, désignée conventionnellement par l'angle θ .

Pour retenir un coin de terre non armée on sait que l'écran doit opposer une réaction

$$F = P \tan(\theta - \varphi)$$

(cf. Fig. 5) où $P = \frac{1}{2} \gamma \frac{z^2}{\tan \theta}$

c'est-à-dire $F = \frac{1}{2} \gamma z^2 \frac{\tan(\theta - \varphi)}{\tan \theta}$

L'effort F est maximal quand $\frac{dF}{d\theta} = 0$ c'est-

à-dire quand $\frac{\tan \theta}{\cos^2(\theta - \varphi)} - \frac{\tan(\theta - \varphi)}{\cos^2 \theta} = 0$

ou encore $\sin \theta \cos \theta = \cos(\theta - \varphi) \sin(\theta - \varphi)$

soit $\boxed{\sin 2\theta = \sin 2(\theta - \varphi)}$ (1)

d'où vient le fameux $\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}$

Voyons maintenant le cas où le coin est stabilisé, non plus par un écran, mais par une première armature située à la profondeur $\frac{z}{2}$ (fig. 6).

Si la largeur de l'armature (et donc l'adhérence sur la longueur utile L) est surabondante, l'effort mobilisable par l'armature n'est fonction que de sa section, et celle-ci devra être calculée pour le prisme $\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}$

Supposons maintenant que l'épaisseur de l'armature soit surabondante et qu'on cherche à en minimiser la largeur b. L'effort T que peut mobiliser par frottement l'armature vaut

$$T = 2bf \sigma_v l_1$$

où $\sigma_v = \gamma \frac{z}{2}$ et $l_1 = L - \frac{z}{2 \tan \theta}$

soit $T_f = b f r z \left[L - \frac{1}{2} \frac{z}{\tan \theta} \right]$ (2)

Pour que $T_f = F$ il faut donc

$$b = \frac{r z^2 \tan(\theta - \varphi) \cdot 2 \tan \theta}{2 \tan \theta} \cdot \frac{2 \tan \theta}{f r z (2L \tan \theta - z)}$$

c'est-à-dire

$$b = \frac{1}{f r} \cdot \frac{\tan(\theta - \varphi)}{2 \tan \theta - 1}$$

Cette largeur est maximale quand $\frac{db}{d\theta} = 0$

soit
$$\frac{\frac{2L}{z} \tan \theta - 1}{\cos^2(\theta - \varphi)} - \frac{\frac{2L}{z} \tan(\theta - \varphi)}{\cos^2 \theta} = 0$$

ou
$$\left(\tan \theta - \frac{z}{2L} \right) \cos^2 \theta = \cos^2(\theta - \varphi) \tan(\theta - \varphi)$$

c'est-à-dire
$$\sin 2\theta - \frac{z}{L} \cos^2 \theta = \sin 2(\theta - \varphi)$$
 (3)

En rapprochant cette équation de l'égalité (1), on constate que la valeur critique de θ n'est plus, ici, égale à $\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}$

De la même manière on montre aisément que si un prisme n'est stabilisé que par le frottement mis en jeu par n lits d'armatures semblables, de largeur b espacés verticalement de Δh , (fig.7), l'effort global mobilisable T_f est

$$T_f = n \cdot b f r \Delta h \left[L - \frac{1}{2} \frac{\Delta h}{\tan \theta} \right] \quad (\text{à rapprocher de (2)})$$

où
$$\lambda = \frac{\sum_{i=1}^{2n} (2i-1) [2n - (2i-1)]}{n^2}$$

et par suite, la valeur de b est maximale quand

$$\sin 2\theta - \lambda \frac{\Delta h}{L} \cos^2 \theta = \sin 2(\theta - \varphi)$$
 (4)

La résolution de cette équation, en fonction des valeurs des paramètres $\varphi, L, \Delta h$ et n conduit toujours à une valeur de θ inférieure à $\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}$, comme l'illustre l'exemple du graphique de la figure 8.

Cette observation confirme donc qu'il ne faut pas limiter la vérification aux seuls plans inclinés à $\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}$, d'autant plus que les choses se compliquent évidemment quand tous les lits d'armatures n'ont plus la même densité, ainsi que pour les plans qui sortent du massif par sa "face arrière".

Méthode de calcul

Nous avons donc établi un programme de calcul automatique, dont le principe est le suivant.

Le calcul est conduit comme un calcul aux états limites ultimes de résistance. L'état limite envisagé correspond, non pas à la rupture proprement dite, mais à l'apparition de grandes déformations irréversibles, par allongement des armatures qui atteignent la limite élastique, et par glissement.

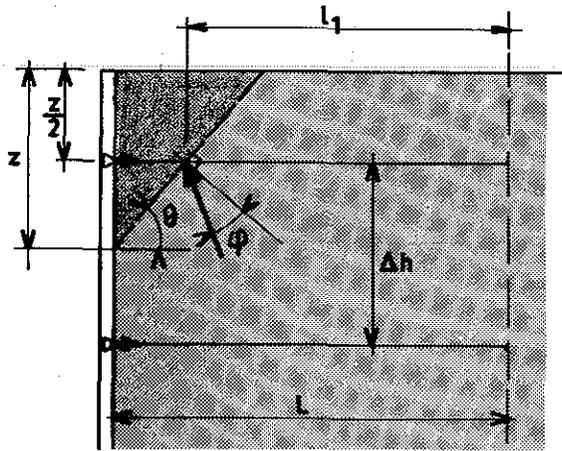


Fig. 6 Coin stabilisé par une armature

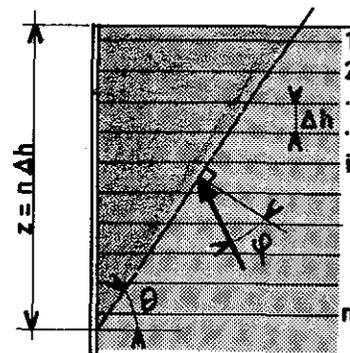


Fig. 7 Coin stabilisé par n armatures

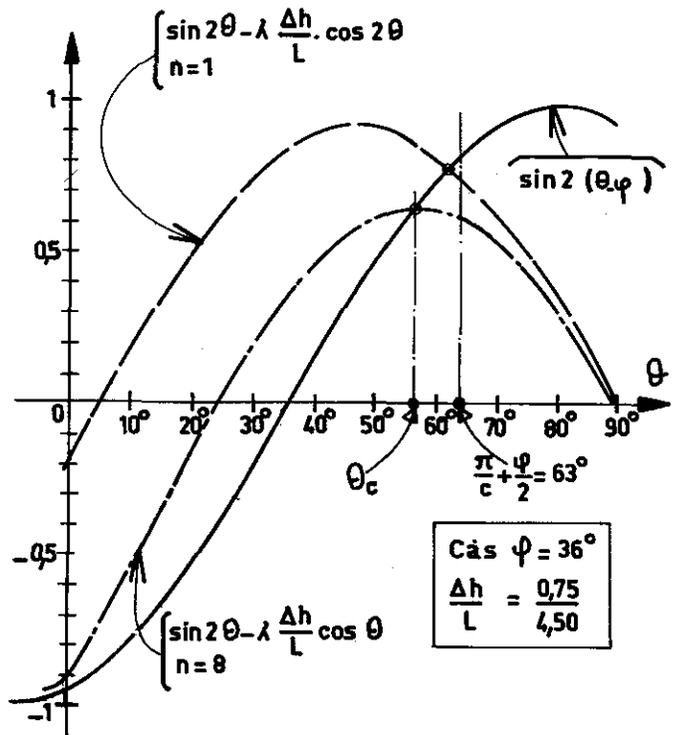


Fig. 8 Résolution graphique de l'équation θ_c

Le but du calcul étant évidemment de vérifier que l'ouvrage projeté présente une marge de sécurité suffisante vis à vis de cet état, la notion de sécurité est introduite dans le calcul par le biais de la pondération des charges appliquées, suivant les Directives Communes de Décembre 1971. Pour simplifier, disons que les charges permanentes défavorables sont majorées de 10%, les charges favorables minorées de 10%, que les surcharges courantes sont majorées de 1/3, puis que l'ensemble est encore majoré de 20%.

On considère donc l'ensemble des plans (dits "de rupture") qui traversent le massif armé, formant avec l'horizontale un angle $\theta > 0$ (fig.9).

Chacun de ces plans délimite avec le parement, la surface libre du remblai et la verticale du point où il sort du massif armé, un volume en forme de "coin". La pointe du coin est à mi-chemin de deux lits d'armatures.

Ce coin est soumis, (toutes pondérations faites) :

- à son poids propre P_1
- à des charges et surcharges, de composantes Q_{v2} et Q_{h2}
- à des efforts de poussée de composantes Q_{v3} et Q_{h3} (ce qui revient à considérer que le plan de rupture peut changer d'orientation à l'extérieur du massif),
- au frottement interne du remblai du massif armé, le long du plan incliné. R est incliné à φ_1 sur la normale au plan (φ_1 frottement interne du remblai dans les conditions de sa mise en oeuvre),

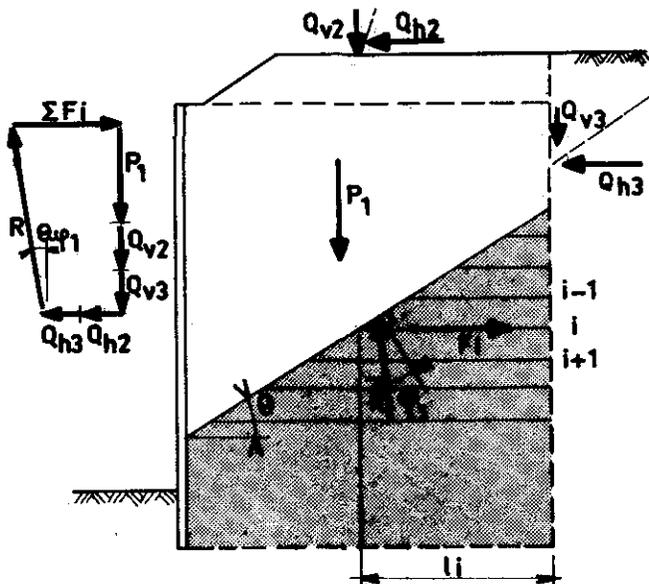


Fig. 9 Calcul par "coins". Principe et notation

- à la somme des efforts de traction F_i développés dans les armatures du massif qui traversent le plan.

L'équilibre du coin est considérée comme assuré si :

$$\sum F_i = (Q_{h2} + Q_{h3}) + (P_1 + Q_{v2} + Q_{v3}) \tan(\theta - \varphi_1)$$

Soit T_i l'effort maximal de calcul mobilisable pour chaque armature i à la traversée du plan (fig. 11).

La stabilité interne est assurée si, pour toute valeur de λ (variant au pas de Δh) et toute valeur de θ (variant au pas de un ou quelques degrés)

$$\sum T_i > \sum F_i$$

Toutes les armatures qui retiennent un coin donné sont supposées pouvoir mobiliser, au même moment, un effort

$$T_i = \text{Min}(T_w, T_f)$$

- T_w est la traction limite de calcul de l'armature, de section utile $\omega = (e_0 - \Delta e) b$ soit $T_w = \omega \sigma_c$ où σ_c est la contrainte limite de calcul c'est-à-dire la limite élastique,

- T_f est l'effort limite de calcul mobilisable par adhérence sur la longueur utile l , au-delà du plan de rupture

$$T_f = 2b \int_{l-l_i}^l f_c^* \sigma_v dx$$

- où σ_v est la contrainte verticale sur l'armature, sans majoration, et f_c^* est le frottement apparent limite, variable avec la profondeur y , comme cela est justifié par ailleurs.

Résultats

Nous avons utilisé ce programme pour vérifier le dimensionnement obtenu par la méthode d'équilibre local, et, pour commencer, dans le cas le plus simple des massifs qui supportent une plateforme horizontale.

A titre d'exemple, voici les résultats pour un massif de 8,25 m de hauteur, soumis aux seules charges permanentes, où les armatures ont 6m de longueur (fig. 10).

L'inclinaison du plan le plus défavorable, varie, comme prévu, en fonction du niveau de la pointe du coin (voir fig. 11).

Le diagramme de la figure 12 donne la variation du coefficient de sécurité globale minimal, toujours en fonction du niveau de la pointe des coins.

Sur le même graphique nous avons reporté, au niveau des armatures cette fois, le coefficient de sécurité donné par la méthode d'équilibre local ; c'est le plus petit des coefficients de sécurité à l'adhérence d'une part, à la traction d'autre part.

Interprétation des résultats

On constate immédiatement que le coefficient de sécurité "global" est supérieur au coefficient "local". Ce résultat était prévisible en haut du massif, où l'adhérence est déterminante. Celle-ci y est en effet rapportée à la longueur $L = 0,3 H$ dans le calcul local, et à une longueur à peine inférieure à $L = \frac{\delta}{2k_0}$ dans le calcul global. Au premier niveau, sur notre exemple, le rapport est de

$$\frac{6,00 - 0,20}{6,00 - 2,50} = 1,65$$

Par ailleurs dans le calcul local, en haut du massif, les efforts dans les armatures sont calculés avec un coefficient K voisin de K_0 . Toujours dans le cas de notre exemple, cela revient à multiplier l'effort nécessaire à stabiliser le coin par

$$\frac{K_0}{\frac{k_0(\theta - \varphi)}{k_0 \theta}} < \frac{0,412}{0,259} = 1,6$$

Le coefficient que nous obtenons pour le premier coin est donc $1,65 \times 1,6 = 2,6$ fois plus grand environ que celui que nous calculons pour la première armature dans le calcul local.

L'écart s'atténue ensuite avec la profondeur, d'abord parce que, d'un côté, le coefficient K se rapproche de K_0 , ensuite parce que, de l'autre côté, les longueurs utiles des armatures se raccourcissent progressivement.

Il n'en reste pas moins que, dans les

coins profonds : pour ce qui concerne l'adhérence, les longueurs utiles les plus grandes sont aussi celles des armatures les plus chargées ; et pour ce qui intéresse la traction, les armatures surabondantes du haut constituent une réserve, toujours mise à contribution. Très grossièrement parlant, du point de vue de la traction, le coefficient de sécurité global cumule, ou intègre, les marges de sécurité aux niveaux locaux. Au total il ne peut donc être que meilleur.

Critique de la méthode

Cette constatation pourrait inciter, ne serait-ce que par souci d'économie, à dimensionner le massif en terre armée par cette voie, et non pas uniquement à contrôler les résultats d'une autre méthode de calcul. Le programme permet en effet, en partant du haut du massif, une détermination récurrente des armatures strictement nécessaires à chaque niveau.

Il est évident d'abord qu'on justifiera de cette manière une distribution d'armatures plus légère que celle à laquelle pourrait mener le calcul "local", et la confirmation en est illustrée par la figure 13.

Cela soulève une première objection, car le calcul par la méthode de l'équilibre local repose sur des mesures expérimentales, dans des ouvrages réels, et rend donc bien compte des contraintes en service.

On se doute ensuite que des répartitions d'armatures différentes - uniformes, ou plus denses en haut, ou plus denses en bas - peuvent offrir des coefficients de sécurité globale équivalents (voir aussi fig. 13). En effet le dimensionnement

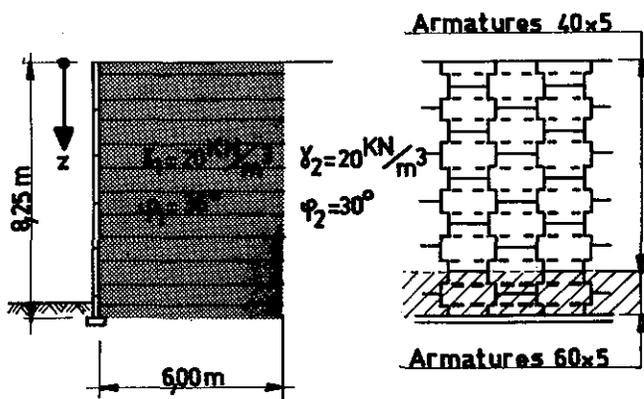


Fig. 10 Exemple d'un massif de 8,25 m Dimensionnement usuel

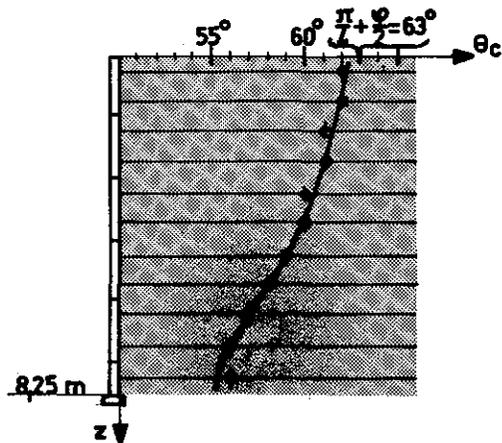


Fig. 11 Vérification du dimensionnement usuel par la méthode des coins. Variation de θ_c

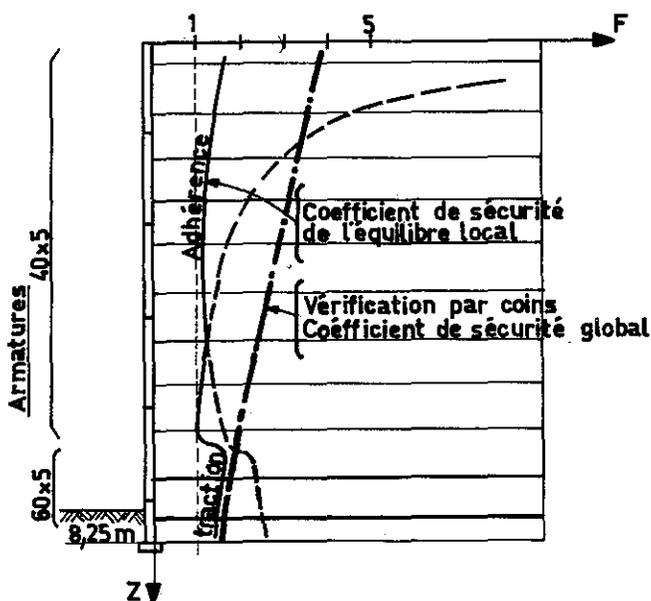


Fig. 12 Vérification du dimensionnement usuel par la méthode des coins, Coefficient de sécurité

par coins se contente au besoin d'un classement des armatures "dans le désordre". Cela n'est pas forcément choquant si on évoque la souplesse de la terre armée, les transferts possibles d'efforts, etc... mais l'expérience fait défaut. Et puis on hésite à admettre - si la technologie oblige à surdimensionner les armatures du haut du massif - que le calcul par coins, sous-estime en compensation la densité des armatures à disposer plus bas.

D'autre part, le schéma de rupture qui sert de point de départ au principe du calcul est essentiellement théorique. Il n'est calqué sur aucune observation expérimentale ; au contraire il a toujours été constaté que la rupture s'initialise en un point, puis progresse dans le massif suivant une courbe qui résulte probablement de redistributions d'efforts.

Enfin il faut observer que le calcul ne repose que sur une équation d'équilibre des forces, sans préjuger de celui des moments.

En conclusion, et mis à part certains cas particuliers de géométrie de massifs ou d'efforts concentrés où il peut constituer la seule approche possible, il serait sans doute imprudent d'utiliser ce calcul global par coins comme une méthode de dimensionnement des massifs de terre armée. Par contre, il constitue certainement un outil intéressant pour

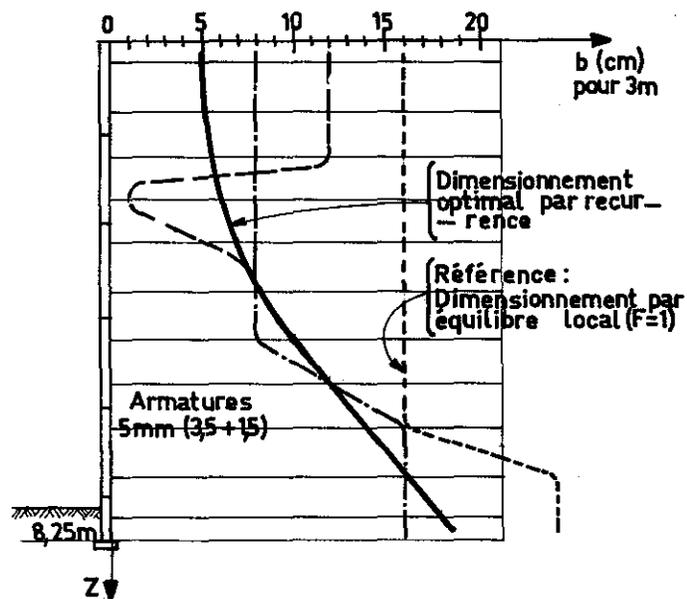


Fig. 13 Différents dimensionnements possibles par la méthode des coins, avec $F_{\text{mini}} = 1$

vérifier, en complément aux autres méthodes éprouvées, que le dimensionnement auquel elles conduisent offre effectivement une marge de sécurité appréciable par rapport à tout risque de rupture plane.

Notons pour finir que cette étude constitue une première approche, simple, de la méthode de calcul suivant des surfaces de rupture cylindriques, qui fait l'objet d'une autre communication.

Références :

- "La Terre Armée", F. SCHLOSSER et H. VIDAL Bull. Liaison Labo. Routiers Ponts et Chaussées n° 41 - Nov. 1969.
- "Dimensionnement des murs en Terre Armée". Session de formation permanente LCPC/ENPC.
- Vorläufige Richtlinien Für die Anwendung des Bauverfahrens "Bewehrte Erde" - Januar 1977 - Bundesminister für Verkehr.
- Rapports de stage (non publiés) de M. Didier PAIN (INSA Rennes) et Mme Claude BERNUCHON (INSA Lyon) 1977.
- Directives Communes relatives au calcul des constructions. Circulaire n° 71 145 du 13.12.1971. B.O. du Ministère de l'Équipement et du Logement.